

Varianta 89

SUBIECTUL I

- a) $S_{ABC} = 5$.
- b) $4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1$.
- c) $m = -\frac{3}{5}$ și $n = 3$.
- d) partea reală este zero.
- e) $S = 12$.
- f) $d : y - 3 = 0$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Numărul numerelor este: $A_3^2 = 6$.
- b) $C_5^2 = 10$.
- c) 5% din 20 este numărul 1.
- d) $p = \frac{2}{5}$.
- e) $\det(A) = -1$.

2.

- a) $f(0) = 1$.
- b) $f'(x) = e^x - 1$.
- c) $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.
- d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- e) Punctul $A(0, 1)$ este punct de minim global al funcției $f \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $A^2 = I_2$.
- b) $A \circ A = A + A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.
- c) $X \circ Y = X + Y - 2I_2 = Y \circ X$, de unde $X \circ Y = Y \circ X$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.
- d) $(X \circ Y) \circ Z = (X + Y - 2I_2) \circ Z = X + Y + Z - 4I_2$
 $X \circ (Y \circ Z) = X \circ (Y + Z - 2I_2) = X + Y + Z - 4I_2$ de unde
 $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$, $\forall X, Y, Z \in M_2(\mathbf{R})$.

- e) $X \circ (2I_2) = X \Leftrightarrow X + 2I_2 - 2I_2 = X \Leftrightarrow X = X$.
- f) Fie $P(n): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - 2(n-1)I_2$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
 $P(2): X_1 \circ X_2 = X_1 + X_2 - 2I_2$ (A).

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_k = (X_1 + X_2 + \dots + X_k) - 2(k-1)I_2, \text{ iar}$$

$$P(k+1): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_{k+1} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{k+1}) - 2kI_2. \text{ Dar}$$

$$X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_{k+1} = (X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_k) \circ X_{k+1} =$$

$$((X_1 + X_2 + \dots + X_k) - 2(k-1)I_2) \circ X_{k+1} = (X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1}) - 2kI_2.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

- g) Din d) legea este asociativă, din c) și e) $2I_2$ este elementul neutru al legii, iar simetricul elementului $X \in M_2(\mathbf{R})$ este $4I_2 - X \in M_2(\mathbf{R})$, de unde $(M_2(\mathbf{R}), \circ)$ este grup (comutativ).

SUBIECTUL IV

a) $f_0(0) = \ln 1 = 0$.

b) $f_1(x) = f_0'(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$.

c) Folosind a) rezultă că $x=0$ este soluție a ecuației $f_0(x) = x$

d) $f_0(x) \leq x \Leftrightarrow \ln(x+1) - x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ unde funcția $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită

prin $g(x) = \ln(1+x) - x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$ Deci $g'(x) > 0, \forall x \in (-1, 0)$ și

$g'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$ de unde rezultă ca punctul $A(0, 0)$ este punct de maxim global
 $\Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow f_0(x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$.

e) Fie $P(n): f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): f_1(x) = \frac{1}{x+1}, (A).$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \text{ iar } P(k): f_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \text{ dar}$$

$$f_{k+1}(x) = f_k'(x) = \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \right)' = (-1)^{k-1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} (A).$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 (f_n(x))' dx = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n} - (-1)^{n-1}(n-1)!.$

g) Calculăm expresia $(-1)^{n-1} \frac{f_n(1)}{(n-1)!} = (-1)^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n(n-1)!} = \frac{1}{2^n}.$ Atunci suma cerută

este: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} = 1 \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}.$ Deci limita cerută

este $\frac{3}{2}.$